

Отдел образования администрации МО Тепло-Огаревский район
Районный методический кабинет непрерывного образования взрослых
Районное методическое объединение учителей математики

Из опыта работы по изучению темы
«Логарифмические уравнения и неравенства»

Подготовила: Макарова Марина Михайловна, учитель математики
МКОУ «Красногвардейская СОШ»

2013 год

ПЛАН:

1. Теоретические сведения.
2. Примеры решения логарифмических уравнений и неравенств, предлагаемые на ЕГЭ по математике.
3. Метод декомпозиции неравенств.

Начнем с краткого изложение основных теоретических моментов, которые нам понадобятся для решения логарифмических уравнений и неравенств.

Логарифмическая функция.

Определение

Функцию вида

$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

называют *логарифмической функцией*.

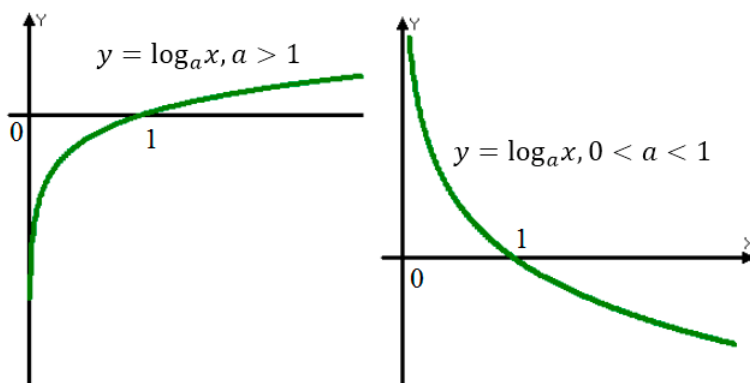
Основные свойства

Основные свойства логарифмической функции $y = \log_a x$:

	$a > 1$	$0 < a < 1$
Область определения	$D(f) = (0; +\infty)$	$D(f) = (0; +\infty)$
Область значений	$E(f) = (-\infty; +\infty)$	$E(f) = (-\infty; +\infty)$
Монотонность	Возрастает на $(0; +\infty)$	Убывает на $(0; +\infty)$
Непрерывность	Непрерывная	Непрерывная
Выпуклость	Выпукла вверх	Выпукла вниз

График логарифмической функции

Графиком логарифмической функции является *логарифмическая кривая*:



Свойства логарифмов

- Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел:
 $\log_a bc = \log_a b + \log_a c, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad a \neq 1.$
- Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов этих чисел:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad a \neq 1.$$

• Если a и b - положительные числа, причем $a \neq 1$, то для любого числа r справедливо равенство:

$$\log_a b^r = r \log_a b, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad a \neq 1.$$

• Равенство $\log_a t = \log_a s$, где $a > 0, a \neq 1, t > 0, s > 0$, справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

• Если a, b, c — положительные числа, причем a и c отличны от единицы, то имеет место равенство (формула перехода к новому основанию логарифма):

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad a \neq 1, \quad c \neq 1.$$

Теорема 1. Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Решение логарифмических уравнений.

Решению **логарифмических уравнений и неравенств** в вариантах ЕГЭ по математике посвящена задача С3. Научиться решать задания С3 из ЕГЭ по математике должен каждый ученик, если он хочет сдать предстоящий экзамен на «хорошо» или «отлично».

Пример 1. Решите уравнение:

$$\lg(x^2 - 6) = \lg(8 + 5x).$$

Решение. В область допустимых значений входят только те x , при которых выражение, находящееся под знаком логарифма, принимает больше нуля. Эти значения определяются следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 6 > 0, \\ 8 + 5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 6, \\ x > -1,6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty), \\ x \in (-1,6; +\infty). \end{cases}$$

С учетом того, что

$$-1,6 = -\sqrt{2,56} > -\sqrt{6},$$

получаем промежуток, определяющий область допустимых значений данного логарифмического уравнения:

$$x \in (\sqrt{6}; +\infty).$$

На основании теоремы 1, все условия которой здесь выполнены, переходим к следующему равносильному квадратичному уравнению:

$$x^2 - 6 = 8 + 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 7, \quad x_2 = -2.$$

В область допустимых значений входит только первый корень.

Ответ: $x = 7$.

Пример 2. Решите уравнение:

$$\log_{0,2}(-x^2 + 4x + 5) = \log_{0,2}(-x - 31).$$

Решение. Область допустимых значений уравнения определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} -x^2 + 4x + 5 > 0, \\ -x - 31 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 5, \\ x < -31. \end{cases}$$

Очевидно, что эти два условия противоречат друг другу. То есть нет ни одного такого значения x , которое подходило бы одновременно под оба из них. Область допустимых значений уравнения является пустым множеством, а значит решений у данного логарифмического уравнения нет.

Ответ: корней нет.

Обратите внимание, что в этом задании нам вообще не пришлось искать корни уравнения. Достаточно оказалось определить, что его область допустимых значений не содержит ни одного действительно числа. Это одно из преимуществ такой последовательности решения логарифмических уравнений и неравенств (начинать с определения области допустимых значений уравнения, а затем решать его путем равносильных преобразований).

Пример 3. Решите уравнение:

$$3 \log_{\frac{1}{2}} x + 5 \log_{\frac{1}{2}} x - 2 = 0.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения определяется здесь легко: $x > 0$.

Используем подстановку:

$$t = \log_{\frac{1}{2}} x.$$

Уравнение принимает вид:

$$3t^2 + 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1}{3}, \\ t_2 = -2. \end{cases}$$

Обратная подстановка:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{3}, \\ \log_{\frac{1}{2}} x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \\ x = 4. \end{cases}$$

Оба **ответа** входят в область допустимых значений уравнения, поскольку являются положительными числами.

Пример 4. Решите уравнение:

$$\log_{0,4}(x+2) + \log_{0,4}(x+3) = \log_{0,4}(1-x).$$

Решение. Вновь начнем решение с определения области допустимых значений уравнения.

Она определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x+2 > 0, \\ x+3 > 0, \\ 1-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x > -3, \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 1).$$

Воспользовавшись правилом сложения логарифмов, переходим к равносильному в области допустимых значений уравнению:

$$\log_{0,4}(x+2)(x+3) = \log_{0,4}(1-x) \Rightarrow$$

Основания логарифмов одинаковы, поэтому в области допустимых значений можно перейти к следующему квадратному уравнению:

$$(x+2)(x+3) = (1-x) \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -5, \\ x_2 = -1. \end{cases}$$

Первый корень не входит в область допустимых значений уравнения, второй — входит.

Ответ: $x = -1$.

Пример 5. Решите уравнение:

$$x^{\log_3 x} = 81.$$

Решение. Будем искать решения в промежутке $x > 0, x \neq 1$. Преобразуем уравнение к равносильному:

$$x^{\log_3 x} = x^{\log_x 81} \Leftrightarrow x^{\log_3 x} = x^{\frac{4}{\log_3 x}} \Leftrightarrow \log_3^2 x = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2, \\ \log_3 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9, \\ x = \frac{1}{9}. \end{cases}$$

Оба **ответа** входят в область допустимых значений уравнения.

Пример 6. Решите уравнение:

$$\log_4(x + 12) \cdot \log_x 2 = 1.$$

Решение. Система неравенств, определяющая область допустимых значений уравнения, имеет на этот раз вид:

$$\begin{cases} x + 12 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0, x \neq 1.$$

Используя свойства логарифма, преобразуем неравенство к равносильному в области допустимых значений:

$$\frac{\log_2(x + 12)}{2\log_2 x} = 1.$$

Используя формулу перехода к новому основанию логарифма, получаем:

$$\log_x(x + 12) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = -3. \end{cases}$$

В область допустимых значений входит только один **ответ:** $x = 4$.

Решение логарифмических неравенств.

Теорема 2. Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то:

при $a > 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$;

при $0 < a < 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

Пример 1. Решите неравенство:

$$\log_{0,5}(x^2 + x - 6) \geq \log_{0,5}(x + 4).$$

Решение. Начнем с определения области допустимых значений неравенства. Выражение, стоящее под знаком логарифмической функции, должно принимать только положительные значения. Это значит, что искомая область допустимых значений определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 > 0, \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty), \\ x > -4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x \in (-4; -3) \cup (2; +\infty).$$

Так как в основании логарифма стоит число, меньшее единицы, соответствующая логарифмическая функция будет убывающей, а потому равносильным по теореме 2 будет переход к следующему квадратичному неравенству:

$$x^2 + x - 6 \leq x + 4 \Leftrightarrow x^2 \leq 10 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{10}; \sqrt{10}].$$

Окончательно, с учетом области допустимых значений получаем **ответ**:

$$x \in [-\sqrt{10}; -3) \cup (2; \sqrt{10}].$$

Пример 2. Решите неравенство:

$$11 \cdot \log_9(x^2 - 12x + 27) \leq 12 + \log_9 \frac{(x-9)^{11}}{x-3}.$$

Решение. Вновь начнем с определения области допустимых значений:

$$\begin{cases} x^2 - 12x + 27 > 0, \\ \frac{(x-9)^{11}}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 3) \cup (9; +\infty).$$

На множестве допустимых значений неравенства проводим равносильные преобразования:

$$\begin{aligned} 11 \cdot \log_9(x-9)(x-3) - \log_9 \frac{(x-9)^{11}}{x-3} &\leq 12 \\ \log_9 [(x-9)^{11}(x-3)^{11}] - \log_9 \frac{(x-9)^{11}}{x-3} &\leq 12 \\ \log_9 \frac{(x-3)^{12}(x-9)^{11}}{(x-9)^{11}} &\leq \log_9 9^{12}. \end{aligned}$$

После сокращения и перехода к равносильному по теореме 2 неравенству получаем:

$$(x-3)^{12} \leq 9^{12} \Leftrightarrow -9 \leq x-3 \leq 9 \Leftrightarrow x \in [-6; 12].$$

С учетом области допустимых значений получаем окончательный **ответ**:

$$x \in [-6; 3) \cup (9; 12].$$

Пример 3. Решите логарифмическое неравенство:

$$\log_{x+1}(x^3 + 3x^2 + 2x) < 2.$$

Решение. Область допустимых значений неравенства определяется следующей системой:

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1, \\ x(x+1)(x+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; +\infty).$$

Видно, что в области допустимых значений выражение, стоящее в основании логарифма, всегда больше единицы, а потому равносильным по теореме 2 будет переход к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 2x < x^2 + 2x + 1 &\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow \\ (x+1)(x^2 + x - 1) < 0 &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(-1; \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right).$$

С учетом области допустимых значений получаем окончательный ответ:

$$x \in \left(0; \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right).$$

Метод декомпозиции неравенств.

Данный метод основан на свойствах логарифмов о совпадении (при всех допустимых значениях) знаков значений логарифмического выражения и соответствующего произведения рациональных выражений:

1)

2)

Пример 1. Решить неравенство:

Необходимо обратить внимание на то, что обучающиеся часто делают ошибку, умножая обе части на выражение с переменной, областью значений которого является множество всех действительных чисел.

Пример 2. Решите неравенство:

$$\frac{2 \log_3(x^2 - 4x)}{\log_3 x^2} \leq 1.$$

Решение.

Область допустимых значений неравенства определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 4x > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (4; +\infty).$$

I способ. Воспользуемся формулой перехода к новому основанию логарифма и перейдем к равносильному в области допустимых значений неравенству:

$$\log_{x^2}(x^2 - 4x)^2 \leq 1.$$

Неравенство будет равносильно двум системам. Первой:

$$\begin{cases} x \in (-1; 0), \\ (x^2 - 4x)^2 \geq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 0), \\ x^2(x - 5)(x - 3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \in (-1; 0).$$

И второй:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty), \\ x^2(x - 5)(x - 3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (4; 5].$$

Итак, окончательный **ответ**:

$$x \in (-1; 0) \cup (4; 5].$$

II способ. Решаем методом интервалов. Преобразуем неравенство к виду:

$$\frac{2 \log_3(x^2 - 4x) - \log_3 x^2}{\log_3 x^2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

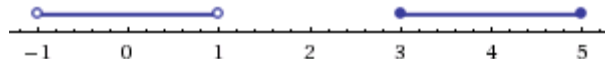
Вычтем из знаменателя $\log_3 1$. Это ничего не изменит, поскольку $\log_3 1 = 0$.

$$\frac{\log_3(x^2 - 4x)^2 - \log_3 x^2}{\log_3 x^2 - \log_3 1} \leq 0$$

С учетом то, что выражения $\log_3 f - \log_3 g$ и $f - g$ — одного знака при $f, g > 0$, в области допустимых значений имеет место следующий равносильный переход:

$$\frac{(x^2 - 4x)^2 - x^2}{x^2 - 1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2 - 5x)(x^2 - 3x)}{x^2 - 1} \leq 0.$$



Множество решений данного неравенства

Итак, $x \in (-1; 1) \cup [3; 5]$, а с учетом области допустимых значений получаем тот же **результат**: $x \in (-1; 0) \cup (4; 5]$.

Итак, что нужно для того, чтобы решать **логарифмические уравнения и неравенства**?

- Во-первых, *внимание*. Не допускать ошибок в проводимых преобразованиях. Следить за тем, чтобы каждое ваше действие не расширяло и не сужало область допустимых значений неравенства и не приводило таким образом ни к потере, ни к приобретению посторонних решений.
- Во-вторых, *умение мыслить логически*. Главная учебно-методическая идея заданий С3 из ЕГЭ по математике состоит в том, чтобы проверить умение учащихся оперировать такими понятиями как система неравенств (пересечение множеств), совокупность неравенств (объединение множеств), осуществлять отбор решений неравенства, руководствуясь его областью допустимых значений.
- В-третьих, четкое *знание* свойств всех элементарных функций (степенные, рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические), изучаемых в школьном курсе математики и *понимание* их смысла.

Главное же требование — это настойчивость в достижении своей цели. Настраивать учеников на постоянную тренировку, если нужно — ежедневно, изучать и запоминать на примерах основные способы решения неравенств и их систем, анализировать возникающие ошибки и не допускать их в будущем. За помощью в этом нелегком деле можно обратиться не только к учителю и репетитору, но и к друзьям и знакомым, книгам, а также огромному количеству материалов, доступных на просторах Интернета. Желаю вам успехов в подготовке детей к Единому государственному экзамену по математике.